1. Matrices

1.1. Matrices y Operaciones

Sean las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1
Identifica los tipos de matrices que son cada una de ellas y sus dimensiones.

Ejercicio 2
Obtén la matriz $A + C - B$. ¿Importa el orden de las sumas?

Ejercicio 3
Obtén las matrices $A \cdot D$ y $B \cdot D$. ¿Qué dimensiones tienen las matrices? ¿Por qué?

Ejercicio 4
Obtén las matrices $D^T \cdot A$, $D^T \cdot B$. ¿Qué dimensiones tienen las matrices? ¿Se puede obtener $A \cdot D^T$?

Ejercicio 5
Obtén la matriz $A \cdot C$ y $C \cdot A$. ¿Importa el orden de las multiplicaciones?

Ejercicio 6
Obtén la matriz A^2.

Ejercicio 7
Obtén la matriz $\frac{1}{2} \cdot B$.

Ejercicio 8
Obtén la matriz $A \cdot \frac{1}{2}B$. ¿En qué se parece a la matriz A y por qué?

Ejercicio 9
Obtén la matriz $B \cdot A \cdot B$

Ejercicio 10
Obtén la matriz $B \cdot C - B \cdot A$

Ejercicio 11
Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

hallar las matrices:

a) $2A + 3B$

b) AB

c) BA

d) A^2

Ejercicio 12
Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

calcular:

a) AB

b) BA

c) BB^t

d) AB^2

Ejercicio 13
Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

comprobar que $(BA)^t = A^t B^t$.

Ejercicio 14
Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix}$, ¿qué relación deben guardar las constantes a y b para que se verifique que $A^2 = A$?

Ejercicio 15
¿Qué matrices conmutan con la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$?

Ejercicio 16
Se consideran las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

calcular B^3 y A^3. (Sugerencia $A = B + I$).

Ejercicio 17
Si A y B son matrices diagonales de orden 2 demostrar que $AB = BA$.

1.2. Determinantes

Ejercicio 18
Calcular los siguientes determinantes de orden 2 :

a) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -25 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$

Ejercicio 19
Calcular los siguientes determinantes de orden 3 :

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & -5 & 5 \\ 1 & -6 & 2 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}$

Ejercicio 20
Calcular los siguientes determinantes de orden 4:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 9 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 6 & 9 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

Ejercicio 21
Calcular el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} a & b-1 & c & d+1 \\ a+1 & b & c-1 & d \\ a & b+1 & c & d-1 \\ a-1 & b & c+1 & d \end{vmatrix}$$

Ejercicio 22
Sea A una matriz cuadrada de orden 2 que verifica $2A^2 = A$. Calcular razonadamente los posibles valores del determinante de A.

Ejercicio 23
Si la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

tiene determinante 1 , averiguar el valor del determinante de las siguientes matrices:

$$B = \begin{bmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{bmatrix}$$

Ejercicio 24
Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 & 1 \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} = 0$$

1.3. Rango

Ejercicio 25
Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 26
Calcular el rango de:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 27
Calcular los parámetros a, b y c para los cuales:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 2 & b \\ -1 & 1 \\ -3 & c \end{bmatrix} \quad \text{rango}\, B = 1$$

Ejercicio 28
Encontrar, en función de los valores del parámetro a, el rango de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a & a & 1 & 1 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 1 & a & a \end{bmatrix}$$

Ejercicio 29
Estudiar según los valores de x, el rango de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{bmatrix}$$

Ejercicio 30
Calcular el rango de la matriz A según los diferentes valores del parámetro real a :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 31
Sin desarrollar el determinante probar la igualdad:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3)(a-1)^2$$

Ejercicio 32
Calcular el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 33
Hallar el rango de la matriz A según los valores del parámetro a :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 1 & 2a^2-2 & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 34
Calcular el valor del parámetro k para que el rango de la matriz A sea igual a 2 :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2\\ 4 & k & -1 & 6 & 4\end{bmatrix}$$

1.4. Matriz Inversa y Ecuaciones Matriciales

Ejercicio 35
Hallar la inversa de $A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ aplicando la definición.

Ejercicio 36

a) Calcular todas las matrices diagonales de orden 2 que coinciden con su inversa.

b) Si A es una de estas matrices, calcular su cuadrado.

Ejercicio 37

a) Demostrar que la matriz $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ verifica una ecuación del tipo $A^2+\alpha A+\beta I=0$, determinando α y β (I denota la matriz identidad).

b) Utilizar el apartado anterior para calcular la inversa de A.

Ejercicio 38

a) Hallar los valores del parámetro p para los que la matriz A tiene inversa:

$$A=\begin{bmatrix}p & 0 & 0\\ 1 & p+1 & 1\\ 1 & 0 & p-1\end{bmatrix}$$

b) Halla la inversa para $p=2$.

Ejercicio 39
Calcular la inversa de las siguientes matrices:

a) $\begin{bmatrix}1 & 4\\ 1 & -6\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Ejercicio 40

a) Demostrar que la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & a & b-1 \\ 1 & a & -1 \end{bmatrix}$, tiene inversa si y solo si los parámetros a y b son no nulos.

b) Calcula A^{-1} cuando $a = b = 1$.

Ejercicio 41
Se consideran las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Discutir en función de los valores que pueda tomar el parámetro real k, si la matriz AB tiene inversa.

b) Discutir, en función de los valores de k, si la matriz BA tiene inversa.

Ejercicio 42
Se consideran las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Determinar si A y B son invertibles y, si lo son, calcula la matriz inversa.

b) Resolver la ecuación matricial $BA - A^2 = AB - X$.

Ejercicio 43

a) Averiguar para qué valores del parámetro t, la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & t & 3 \\ 4 & 1 & -t \end{bmatrix}$ no tiene inversa.

b) Calcular, si es posible, la matriz inversa de A para $t = 2$.

Ejercicio 44
Se considera la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Probar que $B = I + A + A^2$ es la matriz inversa de $I - A$.

Ejercicio 45

a) Averiguar para qué valores del parámetro k admite inversa la matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & k \end{bmatrix}$$

b) Hallar la inversa de A para $k = 1$.

Ejercicio 46

a) Demostrar que $A^2 - A - 2I = 0$, siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Calcular A^{-1} utilizando el apartado anterior o de cualquier otra forma

Ejercicio 47

Calcular la matriz A sabiendo que se verifica la igualdad:

$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 48

Encontrar la matriz A que verifique la ecuación $AX + B = C$, siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 49

Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

hallar la matriz X dada por $AXA^{-1} = B$.

Ejercicio 50

Resolver la ecuación matricial $B(2A + I) = AXA + B$, siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 51

Hallar las matrices simétricas de orden 2 tales que $A^2 = A$.

Ejercicio 52

Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & 1 & 0 & x \\ x & 0 & x & 1 \\ x & x & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Ejercicio 53

Calcular A^n siendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$